

MATEMATIKA FAKULTÁCIÓ

11. évfolyam

számonkérésre +6 órát terveztünk

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	1. Trigonometria	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Vektorokkal végzett műveletek. Hegyesszögek szögfüggvényei, a szögfüggvények általános értelmezése, szögmérés fokban és radiánban, szögfüggvények közötti egyszerű összefüggések, trigonometrikus függvények.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai látásmód fejlesztése. A művelet fogalmának bővítése két újszerű művelettel, a skaláris szorzással és a vektoriális szorzással. Algebrai és a geometriai módszerek közös alkalmazása számítási, bizonyítási feladatokban. A tanultak felfedezése más tudományterületeken is. A függvényszemlélet alkalmazása az egyenletmegoldás során, végtelen sok megoldás keresése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Szögfüggvényekről tanultak ismételése. Trigonometrikus függvények. Összefüggések a szögfüggvények között.		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
Addíciós tételek: – két szög összegének és különbségének szögfüggvényei, – egy szög kétszeresének szögfüggvényei, – félszögek szögfüggvényei, – két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása. A trigonometrikus azonosságok megértése, használata, az alkalmas összefüggés megtalálása. Bizonyítós feladatok		<i>Fizika:</i> két rezgés összetételének leírása.
Függvénytáblázat alkalmazása feladatok megoldásában.		
Két vektor vektoriális szorzata. Jelölések. A vektoriális szorzás tulajdonságai. Ez a művelet nem kommutatív! Párhuzamos vektorok vektoriális szorzata. Szükséges és elégséges feltétel. A terület kifejezése vektoriális szorzattal.		<i>Fizika:</i> <i>forogatónyomaték,</i> <i>Lorentz-erő.</i>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Skaláris szorzat, vektoriális szorzat. Szinusztétel. koszinusztétel. Trigonometrikus azonosság, egyenlet, egyenlőtlenség.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Statisztika, valószínűség	Órakeret 8 óra
Előzetes tudás	Adatok elemzése, gyakoriság, relatív gyakoriság. Táblázatok, grafikonok használata. Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás. Klasszikus valószínűségi modell.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség fogalmának bővítése, mélyítése. A kombinatorikai ismeretek alkalmazása valószínűség meghatározására. Mit jelent a valószínűség – a nagy számok törvénye. Eseményalgebra, az eseményekkel végzett műveletek –a mindennapi szóhasználat és a matematikai megfogalmazás megkülönböztetése. Nevezetes eloszlások felismerése a hétköznapi életben, gyakorlati alkalmazásokban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Események – eseménytér – elemi események. Biztos esemény, lehetetlen esemény.</p> <p>Klasszikus valószínűségi modell. A tanult kombinatorikai módszerek használata.</p> $P(A B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ <p>Feltételes valószínűség</p> <p>Független események $P(AB) = P(A)P(B)$. Valószínűségi változó.</p>		
<p>A valószínűségi változó eloszlása. A valószínűségi változó várható értéke, szórása. Speciális valószínűségi változók. Egyenletes eloszlás. Binomiális eloszlás – visszatevéses mintavétel. Hipergeometrikus eloszlás – visszatevés nélküli mintavétel</p>		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Valószínűség, klasszikus valószínűségi modell. Teljes eseményrendszer. Független esemény.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	3. Függvények 3.1. Sorozatok	Órakeret 16 óra
Előzetes tudás	Számítási sorozat, mértani sorozat fogalma, egyszerű alapösszefüggések	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A hétköznapi életben, matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek észrevétele. Sorozatok megadási módszereinek alkalmazása. Összefüggések, képletek hatékony alkalmazása. A végtelen matematikai fogalmának használata. A határérték fogalmának kialakítása szemléletes megközelítésből indulva.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása. Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése. A teljes indukció módszerének ismétlése. Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat. <i>Matematikatörténet:</i> Fibonacci.</p>	<p><i>Informatika:</i> algoritmusok.</p>
<p>Számtani sorozat. A számtani sorozat n-edik tagja. A számtani sorozat első n tagjának összege. A számtani közép. Számítási feladatok a számtani sorozat felismerésére, az összefüggések alkalmazására. Szöveges feladatok gyakorlati alkalmazásokkal. <i>Matematikatörténet:</i> Gauss.</p>	
<p>Mértani sorozat. A mértani sorozat n-edik tagja. A mértani sorozat első n tagjának összege. A mértani közép. Számítási feladatok a mértani sorozat felismerésére, az összefüggések alkalmazására. Szöveges feladatok gyakorlati alkalmazásokkal.</p>	<p><i>Biológia-egészségtan;</i> <i>kémia; fizika; földrajz;</i> <i>történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> exponenciális folyamatok.</p>
<p>Gyakorlati alkalmazások – kamatszámítás. Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztőrészlet, hitel, THM, gyűjtőjárdék.</p>	<p><i>Földrajz:</i> világgazdaság – hitel – adósság – eladósodás.</p>
<p>Korlátos és monoton sorozatok. Sorozatok konvergenciája – véges és végtelen határérték. Szemléletes megközelítés után, a fogalmak megértése után adjuk meg a definíciókat. Konvergens sorozatok tulajdonságai. Konvergens sorozatnak egy határértéke van. Minden konvergens sorozat korlátos. Műveletek konvergens sorozatokkal. Összeg, szorzat, hányados. Monoton és korlátos sorozatok. Rendőrelv.</p>	<p><i>Informatika:</i> programozás – a sorozat sok tagjának kiszámítása – a határérték, a küszöbindex megsejtése.</p>
<p>Néhány nevezetes sorozat határértéke: q^n, $(1 + \frac{1}{n})^n$, $\sqrt[n]{a}$. A végtelen mértani sor. A racionális számok és a végtelen szakaszos tizedes törtek. Végtelen szakaszos tizedes törtek megadása közösleges törttel. Valós számok közelítése racionális számokkal.</p>	
<p>A kör kerülete, a π közelítése. <i>Matematikatörténet:</i> a π története.</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat. Korlátos, monoton, konvergens sorozat. Végtelen mértani sor.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	4. Függvények 4.1. Függvényanalízis I. - Differenciálszámítás	Órakeret 32 óra
Előzetes tudás	Függvények megadása, értelmezési tartomány, értékészlet. Függvények jellemzése: zérushely, korlátosság, szélsőérték, monotonitás, paritás, periodicitás. Sorozatok határértéke.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Megismerkedés a függvények vizsgálatának új módszerével. A függvény folytonossága és határértéke fogalmának megalapozása. A differenciálszámítás módszereinek használata a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára. A matematikán kívüli területeken – fizika, közgazdaságtan – is alkalmazások keresése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése. Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése.		<i>Informatika:</i> számítógépes szoftver alkalmazása függvények grafikonjának megrajzolására.
A függvények folytonossága. Példák folytonos és nem folytonos függvényekre. A folytonosság definíciói. Műveletek folytonos függvényekkel: $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}, f \circ g.$ Intervallumon folytonos függvények. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.		
Függvény határértéke. Példák a geometria és a fizika területéről. A határérték definíciói, jelölés. Véges és végtelen helyen vett határérték. Véges és végtelen határérték. A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata. Az $\frac{1}{x}$ függvény végtelenben vett határértéke. Alkalmazás racionális törtfüggvények végtelenben vett határértékének meghatározására. A $\frac{\sin x}{x}$ függvény vizsgálata, az $x = 0$ helyen vett határértéke.		<i>Informatika:</i> a határérték számítógépes becslése. <i>Fizika:</i> felhasználás $\sin x$, illetve $\tan x$ közelítésére kis szög esetében.
Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére. A függvénygörbe érintőjének iránytangense. A pillanatnyi sebesség meghatározása.		<i>Fizika:</i> Az út-idő függvény és a pillanatnyi sebesség kapcsolata.

	<p>A fluxus és az indukált feszültség kapcsolata.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> populáció növekedésének átlagos sebessége.</p>
<p>A differenciálhatóság fogalma. A szemléletes megközelítésre alapozva a pontos definíció. A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény. Példák nem differenciálható függvényekre is. Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között. Alapfüggvények deriváltja: Konstans függvény, x^n Műveletek differenciálható függvényekkel. Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja. Trigonometrikus függvények deriváltja. Exponenciális és logaritmus függvény deriváltja. Magasabb rendű deriváltak. <i>Matematikatörténet:</i> Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.</p>	<p><i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás kitérése, sebessége, gyorsulása – ezek kapcsolata.</p>
<p>A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény. – Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. – Szükséges és elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása. 	
<p>Konvexitás vizsgálata deriválással. A konvexitás definíciója. Inflexiós pont. A második derivált és a konvexitás kapcsolata.</p>	
<p>Függvényvizsgálat elemi eszközökkel és differenciálszámítással. A differenciálszámítással nyert módszerek alkalmazása és ezzel párhuzamosan az elemi eszközök felelevenítése: pl. másodfokú függvény vizsgálata, $\sin x$ függvény vizsgálata, nevezetes közepek alkalmazása. Intervallumon értelmezett függvény szélsőértéke. A deriváltak zérushelyeinek és az intervallum végpontjainak vizsgálata.</p>	
<p>Szélsőérték-feladatok.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Változó, változók bevezetése. – A probléma visszavezetése az összefüggéseket felhasználva egyváltozós függvény vizsgálatára. – Differenciálszámítás alkalmazásával az adott értelmezési tartományon belül az abszolút szélsőérték helyének és értékének meghatározása. – Pénzügyi ismeretek: profit maximalizálása, költség minimalizálása. 	<p><i>Fizika:</i> Fermat-elv, Snellius-Descartes törvény.</p>

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Függvény folytonossága, határértéke. Különbégi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabb rendű derivált. Monotonitás, lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. Konvex, konkáv függvény.
------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

12. évfolyam

számonkérésre +6 órát terveztünk

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	1. Függvények 1.1. Függvényanalízis II. - Integrálszámítás	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Függvények megadása, értelmezési tartomány, értékkészlet. Sorozatok. Differenciálszámítás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az integrálszámítás elemeivel ismerkedve bővítjük a közelítés módszerét. A szemléletes képet és a pontos definíciót közelítjük egymáshoz. A Newton–Leibniz-tételt a matematika és a fizika több területén alkalmazzuk. Ismerkedünk olyan példákkal is, amikor csak közelítő eredményt kapunk.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Bevezető feladatok az integrál fogalmához. Függvény grafikonja alatti terület. A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület. A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.		
Alsó és felső közelítő összegek. Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása. Közelítés véges összegekkel. A határozott integrál fogalma, jelölése. A szemléletes megközelítésre alapozva jutunk el a pontos definícióig. Példa nem integrálható függvényre is. Negatív függvény határozott integrálja. A határozott integrál és a terület - előjeles terület. Az integrál közelítő kiszámítása. Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére. <i>Matematikatörténet:</i> Bernhard Riemann.		<i>Informatika:</i> számítógépes szoftver használata.
Korlátos és monoton függvények integrálhatósága. A határozott integrál tulajdonságai: $\int_a^b f = -\int_b^a f ; \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ A függvény konstans szorosának határozott integrálja, összeg és különbség határozott integrálja,		<i>Fizika:</i> A munka és a mozgási energia. Elektromos feszültség két pont között, a potenciál. Tehetetlenségi nyomaték. Alakzat tömegközéppontja. A hidrosztatikai nyomás és az edény oldalfalára ható erő. Effektív áramerősség.
Az integrál mint a felső határ függvénye. Integrálfüggvény.		

<p>Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja. Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között. A primitív függvény fogalma, A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál: – hatványfüggvény, polinom függvény, – trigonometrikus függvények, – exponenciális függvény, logaritmusfüggvény. A határozatlan integrál néhány tulajdonsága. A függvény konstans szorosának határozatlan integrálja, összeg és különbség határozatlan integrálja. A Newton–Leibniz-tétel.</p>	
<p>Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra. Két függvénygörbe közötti terület meghatározása. Forgástest térfogatának meghatározása. Sorozat határértékének meghatározása. Gyorsulásból sebesség, sebességből út (kitérés). Az integrálás közelítő megadása – numerikus módszerek.</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Alsó és felső közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Newton–Leibniz-tétel.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Statisztika, valószínűség	Órakeret 8 óra
Előzetes tudás	Adatok elemzése, gyakoriság, relatív gyakoriság. Táblázatok, grafikonok használata. Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás. Klasszikus valószínűségi modell.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség fogalmának bővítése, mélyítése. A kombinatorikai ismeretek alkalmazása valószínűség meghatározására. Mit jelent a valószínűség – a nagy számok törvénye. Eseményalgebra, az eseményekkel végzett műveletek – a mindennapi szóhasználat és a matematikai megfogalmazás megkülönböztetése. Nevezetes eloszlások felismerése a hétköznapi életben, gyakorlati alkalmazásokban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Véletlen jelenségek megfigyelése. A modell és a valóság kapcsolata. Játékok elemzése: igazságos és igazságtalan játék. Szerencsejátékok. <i>Matematikatörténet:</i> Pascal, Fermat.</p>		<p><i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja. <i>Fizika:</i> radioaktív bomlás.</p>
<p>Események – eseménytér – elemi események. Biztos esemény, lehetetlen esemény. Események közötti műveletek – kapcsolat a halmazműveletekkel. A valószínűség mint az eseménytéren értelmezett függvény. Teljes eseményrendszer. Klasszikus valószínűségi modell. A tanult kombinatorikai módszerek használata. A valószínűség becslése, számolása, összevetés a valósággal – „nagy számok törvénye”. Valószínűségi problémák szemléltetése gráffal.</p>		
<p>Feltételes valószínűség $P(A B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Független események $P(AB) = P(A)P(B)$.</p>		
<p>Geometriai valószínűség. Az eseménytér mérhető - van hossza, területe, térfogata.</p>		
<p>Valószínűségi változó. A valószínűségi változó eloszlása. A valószínűségi változó várható értéke, szórása. Speciális valószínűségi változók. Egyenletes eloszlás. Binomiális eloszlás – visszatevéses mintavétel. Hipergeometrikus eloszlás – visszatevés nélküli mintavétel.</p>		
<i>Matematikatörténet:</i> Pólya György, Rényi Alfréd.		

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Valószínűség, klasszikus valószínűségi modell. Teljes eseményrendszer. Feltételes valószínűség, független esemény. Valószínűségi változó, eloszlás, várható érték, szórás. Egyenletes eloszlás, binomiális eloszlás, hipergeometrikus eloszlás.
------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	3. Rendszerező összefoglalás (emelt szintű tananyag)	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	A 2 év emelt matematika-kiegészítő tananyaga.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Ismeretek rendszerezése, alkalmazása az egyes témakörökben. A szemléleten alapuló megközelítéstől a pontos matematikai fogalmak felé haladás. A megoldási módszerek tudatosítása, a problémákban alkalmazható közös modellek, számítási-bizonyítási módszerek keresése. A hasonló és az eltérő tulajdonságok vizsgálatával a geometriai szemlélet, látásmód megerősítése, ezzel az absztrakciós készség fejlődésének segítése. A tanult ismeretek alkalmazása gyakorlati problémákra is. A matematikatörténet néhány fejezetének, nagy egyéniségének megismerése során betekintés a matematika épülésének folyamatába. Készülés az érettségi vizsgára korábbi évek feladatsorainak megoldásával is. Felkészítés az egyetemi, főiskolai továbbtanulásra is az igényes matematikai gondolkodás fejlesztésével.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p><i>Sorozatok, függvények</i> A határérték fogalmának mélyítése az ismétlés során is, a szemlélettől az absztrakció felé haladva.</p> <p><i>Analízis.</i> A differenciálszámítás és integrálszámítás alkalmazásainak ismétlése. Integrálszámítás.</p>		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
<p><i>Statisztika, valószínűség.</i> Adatsokaságok elemzése. Véletlen jelenségek vizsgálata. Csoportmunka, vélemények megbeszélése, az érvelés módszerének gyakorlása, sejtések megfogalmazása, azok elfogadása vagy elvetése.</p>		<i>Informatika:</i> táblázatkezelő, adatbázis-kezelő program használata.
<p><i>Tudománytörténeti és matematikai érdekességek, neves matematikusok</i> Néhány matematikatörténeti szemelvény. A matematikatörténet néhány érdekes problémájának áttekintése. Matematikusokról a korábbi években szerzett ismeretekre emlékezés, áttekintés. Pl. nem euklideszi geometria - Bolyai János; nagy Fermat-tétel, számítógépek fejlődése – Neumann János... A matematika néhány filozófiai kérdése. A matematika fejlődésének külső és belső hajtóerői. Néhány megoldatlan és megoldhatatlan probléma. Sain Márton: Nincs királyi út. Rényi Alfréd: Dialógusok a matematikáról.</p>		<i>Informatika:</i> könyvtárhasználat, internethasználat.

<p>A fejlesztés várt eredményei a két évfolyamos ciklus végén</p>	<p><i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i></p> <ul style="list-style-type: none">- A kombinatorikai problémához illő módszer önálló megválasztása.- Bizonyított és nem bizonyított állítás közötti különbség megértése.- Feltétel és következmény biztos felismerése a következtetésben.- Szövegértés: a szövegben található információk önálló kiválasztása, értékelése, rendezése problémamegoldás céljából.- A szöveghez illő matematikai modell elkészítése.- A gráfok eszköz jellegű használata probléma megoldásában. <p><i>Függvények, az analízis elemei</i></p> <ul style="list-style-type: none">- Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából.- A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és differenciálszámítás használatával- Az integrálszámítás használata, gyakorlati alkalmazása <p><i>Valószínűség, statisztika</i></p> <ul style="list-style-type: none">- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.- A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módja.- Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása.- Valószínűségi változó eloszlása, várható értéke.
--------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------